

Одинок В. И., Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Колошенко Ю. Б., Чернышова Д. В.
V. I. Odinokov, A. I. Evstigneev, E. A. Dmitriev, Yu. B. Koloshenko, D. V. Chernyshova

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕГОСЯ В ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЕ МЕТАЛЛА, ИМЕЮЩЕГО
ДЕФЕКТЫ В ВИДЕ ПУСТОТ**

**MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF METAL CRYSTALLIZING IN SHELL FORM,
HAVING DEFECTS IN THE FORM OF VOIDS**

Одинок Валерий Иванович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: 79122718858@yandex.ru.

Valeriy I. Odinokov – Doctor of Engineering, Professor, Chief Scientific Associate, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: 79122718858@yandex.ru.

Евстигнеев Алексей Иванович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: diss@knastu.ru.

Aleksey I. Evstigneev – Doctor of Engineering, Professor, Chief Scientific Associate, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: diss@knastu.ru.

Дмитриев Эдуард Анатольевич – доктор технических наук, профессор, ректор Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: innov@knastu.ru.

Eduard A. Dmitriev – Doctor of Engineering, Professor, Rector, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: innov@knastu.ru.

Колошенко Юлия Борисовна – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: koloschenko2011@yandex.ru.

Yuliya B. Koloshenko – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: koloschenko2011@yandex.ru.

Чернышова Дарья Витальевна – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: daracernysova744@gmail.com.

Dariya V. Chernyshova – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: daracernysova744@gmail.com.

Аннотация. Сформулирована задача по определению напряжённно-деформированного состояния (НДС) в отливке, полученной в литейной форме, опирающейся на опорную конструкцию (ОК), при охлаждении в ней затвердевающей стальной сферической отливки. Рассматривается осесимметричное тело вращения, имеющее четыре области: жидкий металл, твёрдый металл, литейная форма, опорная конструкция. Для решения задачи используется уравнение линейной теории упругости, уравнение теплопроводности и апробированный численный метод, согласно которому исследуемая область разбивается системой ортогональных поверхностей на элементы. Для каждого элемента записывается сформулированная система уравнений в разностном виде. Приведена численная схема и разработан алгоритм решения задачи. Рассмотрена задача по кристаллизации стальной отливки в гидростатическом поле.

Summary. The problem of determining the stress-strain state (VAT) in a casting obtained in a casting mold based on a support structure (OC) when cooling a solidifying spherical steel casting in it is formulated. An axisymmetric body of rotation is considered, which has four regions: liquid metal, solid metal, casting mold, and supporting structure. To solve the problem, the equation of the linear theory of elasticity, the equation of thermal conductivity and a proven numerical method are used, according to which the studied area is divided by a system of orthographic surfaces into elements. For each element, a formulated system of equations is written in a differential form. A numerical scheme is given and an algorithm for solving the problem is developed. The problem of crystallization of a steel casting in a hydrostatic field is considered.

Ключевые слова: отливка, дефекты, напряжённое состояние, моделирование, численная схема, алгоритм решения.

Key words: casting, defects, stress state, modeling, numerical scheme, solution algorithm.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>.

УДК 539.37

Введение. Получение металлических деталей сложной конфигурации осуществляется путём разлива металла в разъемную металлическую форму или в керамическую форму, которую разрушают при извлечении затвердевшей отливки. В процессе затвердевания металла (особенно в начальный момент) могут появляться раковины, пузыри от выделяющихся из жидкого металла газов. Этих дефектов можно избежать, если на кристаллизующийся металл будет действовать определённой величины гидростатическое давление [1]. Цель данной работы – разработка математической модели процесса охлаждения, кристаллизации и заживления возможных дефектов (пустот) в отливке, затвердевающей в форме. Для реализации такой математической модели использованы уравнения механики сплошных сред, уравнения теплопроводности и апробированные численные методы. Рассмотрим данную задачу в осесимметричной постановке. На рис. 1 показан фрагмент области, вращающейся вокруг оси I-I и состоящей из жидкого металла I, твёрдого металла II, литейной формы III, опорной конструкции IV, а также дефект A в виде раковины (пустоты). Будем полагать, что дефект A опоясывает относительно оси I-I всю область затвердевшей корочки. Тогда получаемая отливка не теряет осесимметричной формы. Форма III упирается поверхностью в опорную конструкцию (ОК).

Математическая постановка задачи. Имеем осесимметричное тело вращения. С учётом осевой симметрии рассмотрим сечение в плоскости $x_3 = \text{const}$ (см. рис. 1). При этом дефект (полость) в затвердевшем металле будем имитировать внутренним полым кольцом.

Используя теорию малых упругопластических деформаций и Эйлерову систему координат, запишем для каждой из областей систему уравнений.

Область I (жидкий металл):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma = P_1; \quad \dot{\theta} = a_1 \Delta \theta. \quad (1)$$

Область II, III (закристаллизовавшийся твёрдый металл, форма):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} &= 2G_p \varepsilon_{ij}^*; \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \cdot \delta_{ij}; \\ \varepsilon &= \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = 3k_p \sigma + 3\alpha_p (\theta - \theta_p^*); \\ \varepsilon_{ij} &= 0,5(U_{i,j} + U_{j,i}), \quad \dot{\theta} = a_p \Delta \theta; \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ – гидростатическое напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера; G_p ($p = \text{II}, \text{III}$) – модуль сдвига металла ($p = \text{II}$) и формы ($p = \text{III}$); ε_{ij} – деформации; k_p – коэффициенты объёмного сжатия; α_p – коэффициенты линейного расширения; θ – текущая температура; θ_p^* – начальные температуры в области p ($p = \text{II}, \text{III}$); U_i – перемещения; a_p – коэффициенты теплопроводности ($p = \text{II}, \text{III}$). В формулах (2) осуществляется суммирование по повторяющимся индексам i, j .

В процессе охлаждения жидкого металла при условии, что температура металла $\theta_{\text{met}} \leq \theta_{\text{cr}}$ (θ_{met} – температура жидкого металла, θ_{cr} – температура кристаллизации), определяется толщина затвердевшего слоя из решения межфазового перехода:

$$\frac{d\theta_1}{dn} \lambda_1 - \frac{d\theta_2}{dn} \lambda_2 = \frac{d\Delta}{d\tau} L \rho, \quad (3)$$

где θ_1 и θ_2 – соответственно температуры в твёрдой и жидкой фазах; λ_1 и λ_2 – соответственно коэффициенты теплопроводности в твёрдой и жидкой фазах; n – нормаль к границе двух фаз; Δ – толщина корочки; L – скрытая теплота плавления; ρ – плотность твёрдой фазы (см. рис. 2). Если предположить, что температура в твёрдой фазе (корочке) изменяется по линейному закону, а градиент температуры в жидкой фазе равен нулю, то уравнение межфазового перехода (3) примет вид

$$\frac{\Delta\theta_1}{x}\lambda_1 = \frac{dx}{d\tau}L\rho.$$

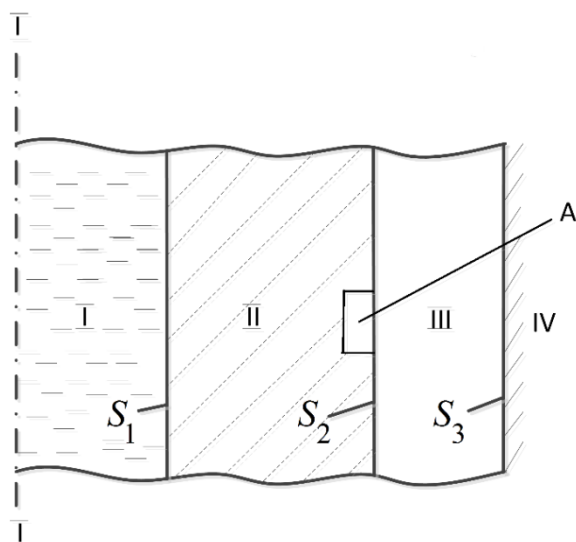


Рис. 1. Схема фрагментов областей исследуемой системы:
I – жидкий металл; II – твёрдый металл (корочка);
III – литейная форма; IV – опорная конструкция

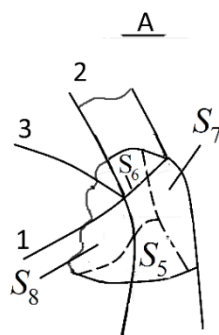


Рис. 2. Схема изменения градиента температуры в затвердевшей корочке металла:
1 – твёрдая фаза, 2 – жидкая фаза

После интегрирования получили $x = C\sqrt{\tau}$.

Так как рассматривается временной шаг $\Delta\tau_n$ и $x = \Delta_n$, то имеем формулу

$$\Delta_n = C\sqrt{\Delta\tau_n}, \quad C = \sqrt{\frac{2\Delta\theta_1\lambda_1}{\rho L}}, \quad (4)$$

где Δ_n – толщина закристаллизовавшейся корочки; $\Delta\theta_1$ – перепад температур в твёрдой фазе вблизи фронта кристаллизации.

Время процесса кристаллизации τ^* разбивается на малые шаги $\Delta\tau_n$ (n – номер временного шага). На каждом временном шаге $\Delta\tau_n$ вычисляется толщина твёрдой фазы Δ_n ($\Delta = \sum_{n=1}^N \Delta_n$).

Для решения системы (2) с учётом (1) использовался апробированный численный метод, описанный в работе [3]. Согласно данному методу, область деформирования разбивается на конечное число ортогональных криволинейных элементов (рис. 3, а). На рис. 3, в, г показано распределение напряжений σ_{ij} и перемещений U_{ij} по граням элемента.

При осевой симметрии имеем

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad U_3 = 0. \quad (5)$$

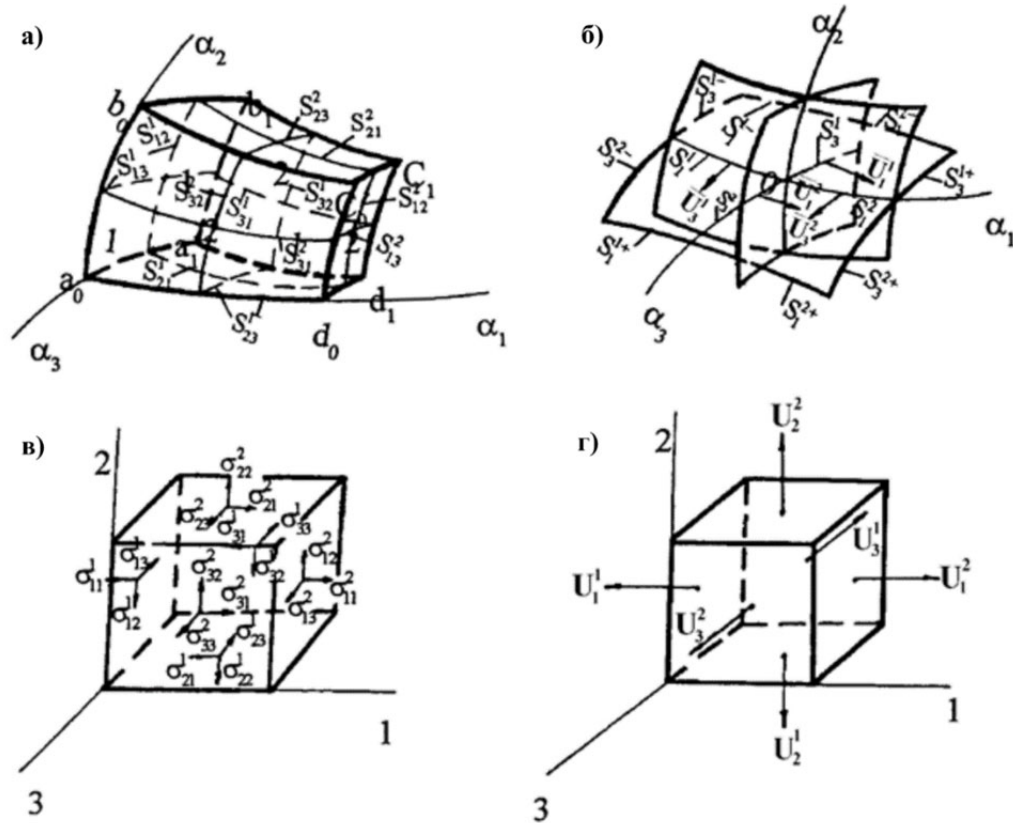


Рис. 3. Область деформирования: а – схема разбивки на элементы; б – распределение перемещений по границам граней элемента; в – распределение напряжений; г – распределение перемещений по граням элемента

В соответствии с работой [3] уравнения (2) и значения ε_{ij} с учётом (5) запишутся

$$S_{13}\Delta S_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + S_{12}\Delta S_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + 0,5\Delta\sigma_{11}S_{12}S_{13} + 0,5\Delta\sigma_{12}S_{21}S_{23} + (S_{21}\Delta S_{23} + 2S_{23}\Delta S_{21})\sigma_{12} = 0; \quad (6)$$

$$S_{21}\Delta S_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + S_{23}\Delta S_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 0,5\Delta\sigma_{22}S_{23}S_{21} + 0,5\Delta\sigma_{21}S_{12}S_{13} + (S_{12}\Delta S_{13} + 2S_{13}\Delta S_{12})\sigma_{21} = 0;$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}); \quad (7)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = 2G_p(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33});$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3k_p\sigma + 3\alpha_p(\theta_n - \theta_p^*), \quad (8)$$

где $\sigma_{ij} = 0,5(\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2)$, $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1$, $(i, j = 1, 2, 3)$;

$$\varepsilon_{11} = \frac{2\Delta U_1}{S_{21}} + \frac{2U_2}{S_{21}} \cdot \frac{\Delta S_{21}}{S_{12}}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{2\Delta U_2}{S_{32}} + \frac{2U_1}{S_{12}} \cdot \frac{\Delta S_{12}}{S_{21}}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{2U_1}{S_{13}} \cdot \frac{\Delta S_{13}}{S_{31}} + \frac{2U_2}{S_{23}} \cdot \frac{\Delta S_{23}}{S_{32}},$$

здесь $U_i = U_i^1 + U_i^2$; $\Delta U_i = U_i^2 - U_i^1$, $(i = 1, 2)$.

При этом S_{ik}^j ($i, k = 1, 2, 3; j = 1, 2$) – величина дуги средней линии, расположенной на грани j вдоль координаты α_k и перпендикулярная координате α_i . Значения S_{ik}^j вычисляются как средние

от значений дуг границы граней. Вводятся обозначения $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$, $\Delta S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1$. Расположение σ_{ij} и U_i по граням элемента показано на рис. 3, в, г.

Уравнения (6), (9) записаны с учётом осевой симметрии:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3} = 0; \quad i = 1, 2, 3,$$

для тел вращения имеет место

$$\Delta S_{31} = 0; \quad \Delta S_{32} = 0; \quad \frac{\Delta \bar{U}_1}{S_3} = 0; \quad \frac{\Delta \bar{U}_2}{S_3} = 0; \quad U_3 = 0.$$

Сдвиговые значения ε_{ij} ($i \neq j$) для узла (0) запишутся в виде

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{2\Delta \bar{U}_2}{S_1} - 0,5\bar{U}_2 \frac{S_2^+ - S_2^-}{S_1 S_2} + \frac{2\Delta \bar{U}_1}{S_2} - 0,5\bar{U}_1 \frac{S_1^+ - S_1^-}{S_1 S_2}, \quad (10)$$

где $S_i = S_i^1 + S_i^2$; $\Delta \bar{U}_i = \bar{U}_i^2 - \bar{U}_i^1$; $S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+}$; $S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-}$; значения $\bar{U}_i^j$ вычисляются как средние от значения U_i по граням элемента. В работе [3] доказано, что разностный аналог системы (6)–(8) с учётом (9) при наличии начальных и граничных условий является определяемым. Размерность системы (6–8) значительно сокращается, если разбить все неизвестные на две группы: зависимые переменные и независимые.

В работах [2; 3] свёртка системы (6)–(8) проводилась для односвязной области. Наличие дефекта (пустоты) делает рассматриваемую область многосвязной. Это усложняет процедуру свёртки.

Пусть ко второй группе относятся все значения U_2 , не вошедшие в граничные условия, гидростатическое напряжение σ , а также $U_1|_{S_8}$, $U_1|_{S'_3}$, тогда:

1. Из уравнения сохранения массы (8) выразим в рекуррентной форме с учётом выражений (9)

$$U_1^2 = U_1^1 + [A],$$

где $[A]$ – оператор, не содержащий U_1^2 ; направление обхода области по $x_1(\rightarrow)$, по $x_2(\uparrow)$.

2. Определяем сдвиговые выражения ε_{ij} ($i \neq j$) по внутренним узлам сетки в соответствии с формулой (10); $i = 1, j = 2$.

3. Определяем σ_{ij} ($i \neq j$) по внутренним узлам сетки из уравнений состояния: $\sigma_{12}^0 = G_p^0 \varepsilon_{12}^0$.

4. Определяем σ_{ij} по внешним узлам сетки из граничных условий, а на контактных поверхностях – из закона трения.

5. Определяем σ_{ij} по граням элементов как средние от значений σ_{ij} в узлах граней.

6. Разности ($\sigma_{ii} - \sigma_{jj}$) в уравнениях (6) выражаются через (7).

7. Уравнения (6) переписываются в рекуррентном виде:

$$\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 + [B_i], \quad i = 1, 2;$$

где $[B_i]$ – операторы, не содержащие σ_{ij}^1 , направление обхода области $x_1(\leftarrow)$, $x_2(\downarrow)$.

8. При встрече с дефектом имеем уравнения

$$F_i = \sigma_{ii}^2|_{S_k} + [B_k] = 0,$$

$$i = 1 \Rightarrow k = 8,$$

$$i = 2 \Rightarrow k = 6.$$

9. Первое из уравнений (7) перепишем в виде

$$F_4 = \sigma_{11} - \sigma_{22} - 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = 0.$$

Направление обхода области по $x_1(\rightarrow)$, по $x_2(\uparrow)$; этих уравнений столько, сколько неизвестных перемещений U_2 .

10. Из второго уравнения (7) определяем

$$\sigma_{33} = \sigma_{22} - 2G_p(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}),$$

где $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ вычисляются по формулам (9).

11. Уравнения по гидростатическому напряжению

$$F_5 = 1/3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - \sigma = 0$$

содержат напряжения по гидростатическому напряжению в элементе, кроме элементов содержащих дефекты.

Таким образом, если положить за независимые переменные $X = \{U_2, \sigma, U_1|_{S'_3}\}$, то пробегаая вышеуказанную последовательность, можем определить зависимые переменные через X .

Эквивалентная система уравнений состоит из выражений

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_{11}^2|_{S_8} + [B_8] = 0; \\ F_2 &= \sigma_{22}^2|_{S_6} + [B_6] = 0; \\ F_3 &= \sigma_{11}^2|_{S'_3} + [B_6] = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$F_4 = \sigma_{11} - \sigma_{22} - 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = 0;$$

$$F_5 = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma = 0.$$

Таким образом, система, получаемая непосредственной аппроксимацией исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных конечными разностями, преобразуется в эквивалентную систему алгебраических линейных уравнений, число уравнений в которой примерно на порядок меньше, чем в исходной. Если положить $G_p = \text{const}$, то система (11) будет линейной.

Коэффициенты и свободные члены новой линейной эквивалентной системы уравнений можно найти с помощью следующей процедуры.

Пусть эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\bar{F}_i = a_{ij}x_j + b_i = 0; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Если положить все неизвестные равными нулю $x_i = 0, i = 1, \dots, n$, то, пробегаая вышеприведённую последовательность и насчитывая $\bar{F}_i$ по формулам (11), найдём свободные члены новой системы:

$$\bar{F}_i^0 = b_i; \quad i = 1, \dots, n.$$

Далее находим коэффициенты a_{ij} . Для этого положим $x_k = 1, x_i = 0, (i \neq k; i = 1 \dots n)$. Опять, пробегаая вышеуказанную последовательность, находим $\bar{F}_i^k$ и a_{ik} по формуле

$$a_{ik} = \frac{\bar{F}_i^k - \bar{F}_i^0}{1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, определяется вся матрица a_{ik} новой эквивалентной системы. Решение этой системы осуществляем по стандартной программе методом Гаусса. Для решения уравнения теплопроводности используется численный метод, описанный в работе [3]. При этом будем считать область односвязной, т. е. не учитывать появляющиеся пустоты области Π . В соответствии с данным методом для каждого внутреннего k -го элемента записывается тепловой баланс, из которого выводится уравнение теплопроводности в разностном виде и строится итерационная процедура, которая с учётом того, что тепловой поток по α_3 равен нулю, представляется итерационной формулой:

$$\theta_k = \frac{\theta_k^* + t_{12}\theta_1^+ + t_{11}\theta_1^- + t_{22}\theta_2^+ + t_{21}\theta_2^-}{1 + t_{12} + t_{11} + t_{22} + t_{21}},$$

где θ_k^* – средняя температура в k -м элементе в начале временного шага $\Delta\tau$;

$$t_{12} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^+)}{S_{21} + S_{21}^+} F_1^2 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}; \quad t_{11} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^-)}{S_{21} + S_{21}^-} F_1^1 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k};$$

$$t_{22} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^+)}{S_{12} + S_{12}^+} F_2^2 \frac{\Delta\tau}{G_k \gamma_k V_k}; \quad t_{21} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^-)}{S_{12} + S_{12}^-} F_2^1 \frac{\Delta\tau}{G_k \gamma_k V_k};$$

$$F_i^j = S_{ik}^j \cdot S_{ip}^j; i \neq k \neq p; i, k, p = 1, 2, 3; j = 1, 2; V_k = \frac{S_{13} S_{12} (S_{21} + S_{31})}{16},$$

$\lambda_k, \theta_k, C_k, \gamma_k$ – соответственно средние значения коэффициента теплопроводности, температуры, теплоёмкости и удельный вес в k -м элементе в конце временного шага $\Delta\tau$; $\lambda_i^-, \theta_i^- (i = 1, 2)$ – соответственно коэффициенты теплопроводности и температуры в элементе, следующем за элементом k по координате x_i в отрицательную сторону; λ_i^+, θ_i^+ – аналогичные параметры в положительном направлении x_i ;

$$S_{21}^- = S_{21}^{1-} + S_{22}^{2-}; \quad S_{21}^+ = S_{21}^{1+} + S_{22}^{2+};$$

здесь $S_{ij}^{1+} (i \neq j; i, j = 1, 2)$ – длина дуги S_{ij}^1 – элемента, следующего за элементом k в положительном направлении по координате x_j ; S_{ij}^{1-} – то же, но в отрицательном по x_j ; θ_i^+ – температура в элементе, следующем за элементом k в положительном направлении x_i ; θ_i^- – то же, но в отрицательном направлении x_i .

Алгоритм численного решения задачи:

1. Время охлаждения τ^* разбивается на конечное число шагов: $\tau^* = \sum \Delta\tau_n$, n – номер временного шага.
2. Исследуемая область разбивается на конечное число ортогональных элементов.
3. Задаются начальные и граничные условия по элементам, образующим рассматриваемую область, и константы физико-механических свойств материалов.
4. Вычисляются длины дуг элементов $S_{ik}^j (i, k = 1, 2; i \neq k; j = 1, 2)$.
5. Определяется поле температур на временном шаге $\Delta\tau_n$ численным решением уравнения теплопроводности с использованием итерационной формулы (11) при наличии начальных и граничных условий на данном временном шаге.
6. Если температура в области (I) у поверхности $S_2 \theta|_{S_2} \leq \theta_{II}^*$, то вычисляется толщина закристаллизовавшейся корочки Δ_n по формуле (4). Если $\theta|_{S_2} > \theta_{II}^*$, то выполняется п. 7.
7. Решается система уравнений (11) с учётом разностных аналогов (6), (7), (9) и разработанной методики, описанной выше. Определяются поля напряжений σ_{ij} и перемещений U_i .
8. На поверхности S_3 производится оценка прилегания формы к ОК по каждому элементу, если $\sigma_{11}|_{S_3} > 0 \Rightarrow \sigma_{11} = 0$, формируется поверхность S_3' , выполняется п. 7.
9. Производится шаг по времени. Если $\sum \Delta\tau_n < \tau^*$, то выполняется п. 4. Если $\sum \Delta\tau_n = \tau^*$, процесс вычисления закончен.

Решение задачи. Выше даны общая постановка задачи и математическая модель для осесимметричной конструкции оболочковой формы (ОФ), имеющей дефекты в виде раковин (пустот) в кристаллизующемся металле.

Рассмотрим частный случай – залив жидкой стали в металлическую форму (см. рис. 4, а).

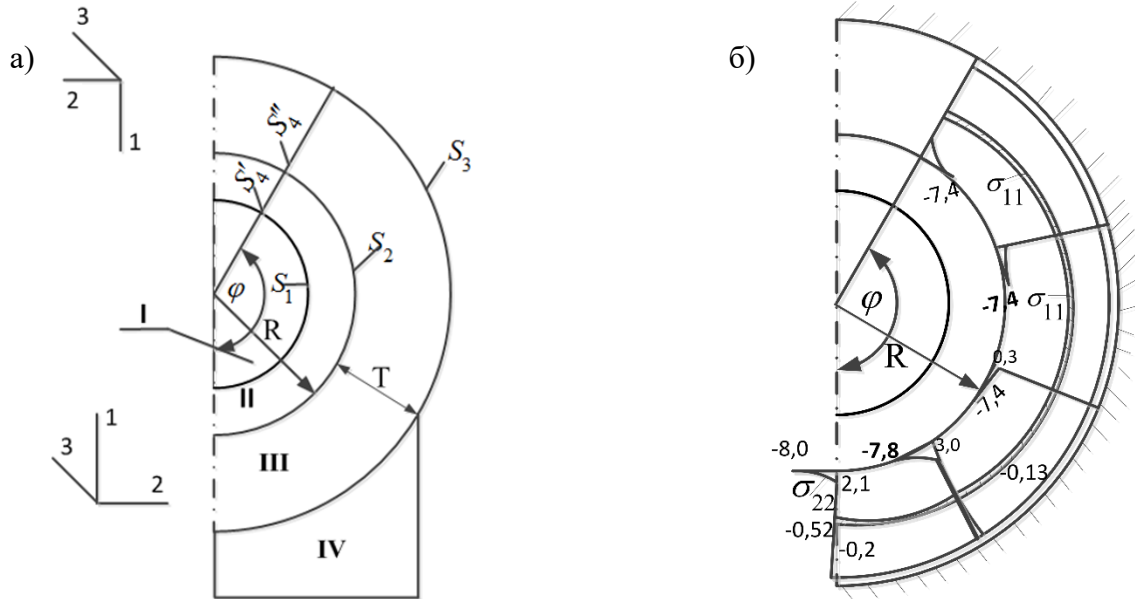


Рис. 4. Расчётная схема системы с указанием поверхности к граничным условиям задачи (а):
 S_1 – поверхность контакта жидкого и затвердевшего металла; S_2 – внутренняя поверхность
 контакта затвердевшего металла и металлической формы; S_3 – внешняя поверхность
 металлической формы; T – толщина литейной формы;
 эпюры нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} в области II при $\tau = 0,1$ с (б)

Начальные условия задачи:

1. $\Delta|_{\tau=0} = 0$ – отсутствие твёрдой фазы металла;
2. $\theta_I|_{\tau=0} = \theta_0$ – температура разливаемого жидкого металла;
3. $\theta_{III}^*|_{\tau=0} = \theta^*$ – начальная температура формы;
4. θ_{II} – температура матрицы;
5. θ_{II}^* – температура кристаллизации металла.

Граничные условия задачи (см. рис. 4, а):

- на оси симметрии $U_2 = 0$; $\sigma_{21} = 0$; $q_{II} = 0$;
- на поверхностях S_1, S_3, S_4 .

$$\sigma_{11}|_{S_1} = P_1; \sigma_{12}|_{S_i} = 0, (i = 7, 8); \sigma_{11}|_{S'_3} = 0, (i = 7, 8);$$

$$\sigma_{12}|_{S''_3} = 0, \sigma_{22}|_{S_i} = 0, (i = 5, 6), \sigma_{22}|_{S''_4} = P_1;$$

$$U_1|_{S'_3} = 0, \sigma_{22}|_{S_i} = 0, (i = 5, 6), \quad U_2|_{S'_4} = 0, \sigma_{21}|_{S_i} = 0; (i = 4, 5, 6);$$

$$\sigma_{12}|_{S'_3} = -\Psi \frac{U_{ск}}{U^*} \cos(n_1 \alpha_1); \theta|_{S_3} = \theta^*,$$

где Ψ – параметр, характеризующий условия трения между формой и ОК; $U_{ск}$ – скольжение материала формы относительно ОК; U^* – нормирующее перемещение; $q_n|_{S_3}$ – плотность теплового потока по нормали к поверхности S_3 ; $S_3 = S'_3 + S''_3$, здесь S'_3 – свободная поверхность, S''_3 – контактная поверхность. При решении температурной задачи использовались граничные условия первого рода. С этой целью воспользуемся данными работы [4].

$$\theta_M = 1550 - 1,666\tau - \tau(60 - \tau) / (10 + \tau^2); \theta \leq \tau \leq 60 \text{ с};$$

$$\theta^*|_{S_3} = 20 + 17,3\sqrt{\tau},$$

где τ – время охлаждения, с.

Исходные данные:

Геометрические параметры: $T = 50$ мм, $R = 20$, $\varphi = 1500^\circ$.

Временные интервалы $\Delta\tau_n$: 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 2,0; 5,0; 6,0; 8,0; 9,0 с; параметр трения $\psi = 0,001$.

Разбиение области: $N1 \times N2 = 15 \times 20$.

Приняты следующие физические параметры разливаемой стали при температуре $\theta > 1000^\circ\text{C}$ ($\theta_{met}^* = 1500^\circ\text{C}$): $G = 1000$ кг/мм²; $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹; $\lambda = 0,0298$ Вт/(мм $\cdot^\circ\text{C}$); $L = 270 \cdot 10^3$ Дж/кг (скрытая теплота плавления); $C = 444$ Дж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$); $\gamma = 7,80 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³; $\theta_k = 1450^\circ\text{C}$.

Физические свойства металлической формы такие же, что и физические параметры разливаемой стали, но

$$G = 8100 [1 - 1,2 \cdot (Q/1000)^2].$$

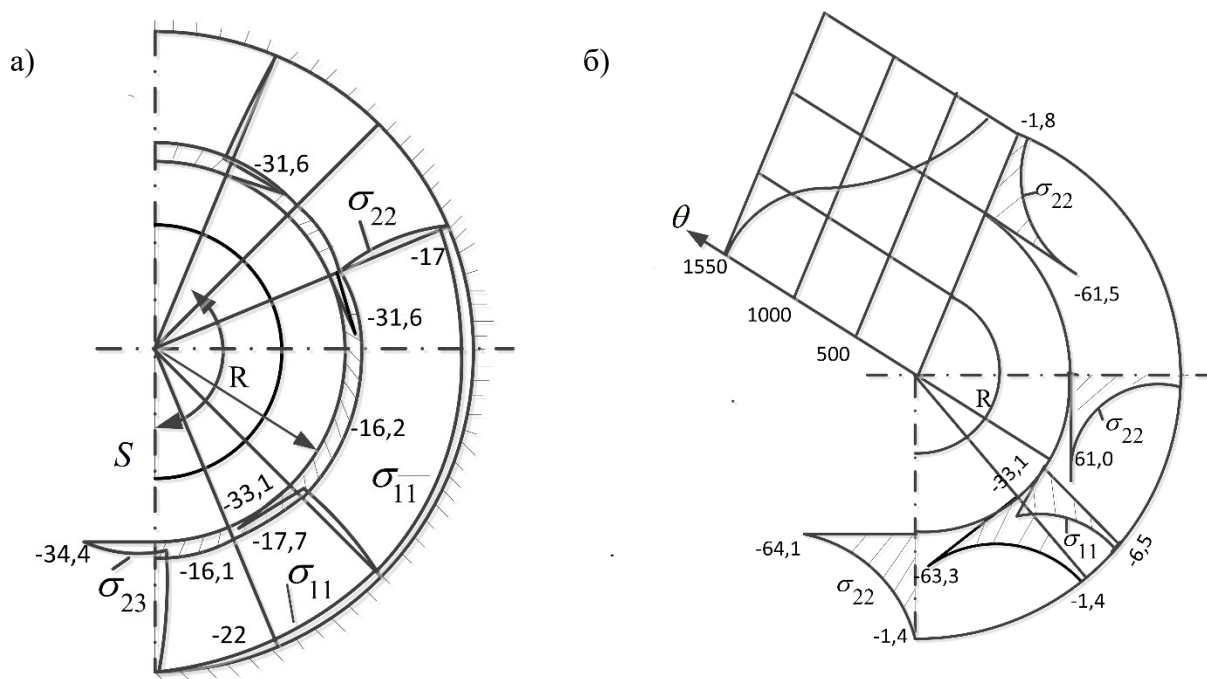


Рис. 5. Эпюры нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} в области II: а – при $\tau = 1,15$ с; б – при $\tau = 8,65$ с

На рис. 4, б и рис. 5, б приведены некоторые результаты расчётов поставленной задачи. На рис. 4, б и рис. 5 изображены эпюры σ_{11} , σ_{22} в металлической форме в различные временные интервалы при отсутствии дефекта в области II. Сжимающие напряжения σ_{22} на стыке формы с разливаемым металлом увеличиваются (по модулю) до 8,65 с, затем температура в форме начинает выравниваться и сжимающие напряжения σ_{22} также выравниваются по сечению, уменьшаясь по модулю.

При наличии гидростатического давления $P_1 = 100$ атм, 300 атм на рис. 6 показаны перемещения u_1 в области дефекта (раковины), которая может появиться при кристаллизации металла вблизи поверхности металлической формы.

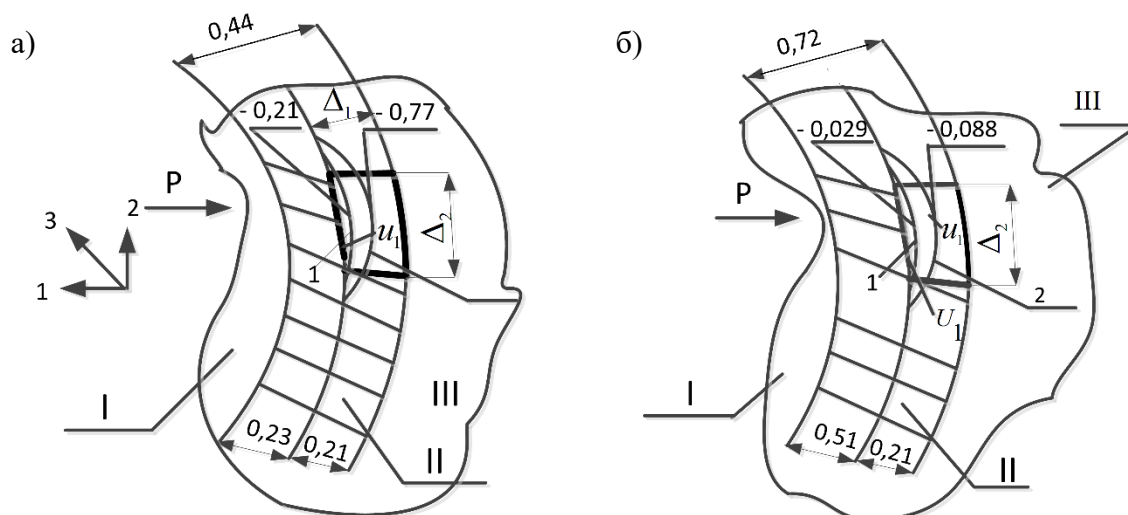


Рис. 6. Перемещение u_1 в затвердевшей корочке металла при гидростатическом давлении $P_1 = 100$ атм (1), 300 атм (2): а – дефект на поверхности формы при толщине корочки над дефектом 0,13 мм, $\tau = 0,16$ с; б – при толщине корочки 0,51 мм, $\tau = 1,16$ с

На рис. 6, а дефект расположен на поверхности формы ($\Delta_1 = 0,21$ мм; $\Delta_2 = 2,5$ мм) и закрыт корочкой в 0,23 мм. На рис. 6, б корочка составляет 0,5 мм. Видим, что с увеличением толщины корочки над дефектом эффективность гидростатического давления резко падает: так, если образующаяся корочка над дефектом 0,23 мм, то дефект быстро закрывается уже при $P = 100$ атм, а если корочка в два раза толще, то дефект не закроется и при $P = 300$ атм.

Выводы:

1. Поставлена задача по определению НДС в кристаллизующейся корочке металла, имеющей дефекты в виде раковины (пустот) при наличии гидростатического поля.
2. С использованием апробированного численного метода разработаны численная схема и алгоритм решения задачи.
3. Разработанная методика продемонстрирована на решении задачи по заливке стали в металлическую форму.
4. Показано, что эффективность гидростатического поля резко падает, если его не применять непосредственно в период начала кристаллизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент № 2782365 Российская Федерация, МПК В22D 15/00 (2006.01), В22D 27/13 (2006.01). Способ изготовления полый литой металлической заготовки: № 2022117823: заявлено 29.06.2022: опубликовано 26.10.2022 / Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Одинокое В. И. – Бюл. № 30.
2. Математическое моделирование процессов получения отливок в керамические оболочковые формы / В. И. Одинокое, Э. А. Дмитриев, А. И. Евстигнеев, А. В. Свиридов. – М.: Инновационное машиностроение, 2020. – 256 с.
3. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одинокое, Б. Г. Каплунов, А. В. Песков, А. В. Баков. – М.: Наука, 2008. – 178 с.
4. Севастьянов, Г. М. Об одной начально-краевой задаче теплопроводности в системе с фазовыми переходами / Г. М. Севастьянов, А. М. Севастьянов, В. И. Одинокое // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25. – № 3. – С. 119-133.